4. CAMBIOS DE VARIABLES, INTEGRALES IMPROPIAS Y APLICACIONES

4.4. Aplicaciones

Cálculo de áreas

El **área** de un recinto plano $S \subset \mathbb{R}^2$ es:

$$A(S) = \iint_S dx\, dy$$

Cálculo de volúmenes

El **volumen** de un recinto $D \subset \mathbb{R}^3$ es:

$$V(D) = \iiint_S dx\, dy\, dz$$

y, en el caso particular de que $D = \big\{(x, y, z) \,:\, (x, y) \in S \subset \mathbb{R}^2 \text{ y } \varphi_1(x, y) \leq z \leq \varphi_2(x, y)\big\}$, el volumen es:

$$V(D) = \iiint_D dx\, dy\, dz = \iint_S dx\, dy \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} dz = \iint_S \left(\varphi_2(x, y) - \varphi_1(x, y)\right) dx\, dy$$

Valor medio de una función

El **valor medio de la función** $f \,:\, D \longrightarrow \mathbb{R}$ en el recinto $D \subset \mathbb{R}^n$ es:

$$\mathrm{VM}(f, D) = \frac{\int_D f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}}{\int_D d\mathbf{x}}$$

En el plano y en el espacio, la fórmula del valor medio queda, respectivamente, como:

$$\mathrm{VM}(f, D) = \frac{1}{A(D)} \iint_D f(x, y)\, dx\, dy \qquad\qquad \mathrm{VM}(f, D) = \frac{1}{V(D)} \iiint_D f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

Ejemplo

La temperatura en los puntos del rectángulo $R = [-1, 1]^2$ es proporcional al cuadrado de la distancia al origen. **(a)** ¿Cuál es la temperatura media? **(b)** ¿En qué puntos del cubo la temperatura coincide con la temperatura media?

Masa y centro de gravedad

Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto que representa a cierto cuerpo físico, y sea $\delta(\mathbf{x})$ la densidad puntual en el punto $\mathbf{x} \in D$. La **masa** del cuerpo D es:

$$m(D) = \int_D \delta(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

y su centro de gravedad es el punto $G = (x_1^g, x_2^g, \ldots, x_n^g) \in \mathbb{R}^n$ donde:

$$x_i^g = \frac{1}{m(D)} \int_D x_i \delta(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \quad , \qquad 1 \leq i \leq n$$

Ejemplo

Calcula la masa y el centro de gravedad de $R = [0, 1]^2$ con densidad puntual $\delta(x, y) = e^{x+y}$.

Momentos de inercia

Los **momentos de inercia** miden la respuesta de un sólido a los esfuerzos que se realizan para someterlo a rotaciones. Si $W \subset \mathbb{R}^3$ es un sólido con densidad uniforme δ, los momentos de inercia I_x, I_y e I_z respecto de los ejes x. y y z, respectivamente, se definen por:

$$I_x = \iiint_W (y^2 + z^2)\delta \, dx\, dy\, dz \quad I_y = \iiint_W (x^2 + z^2)\delta \, dx\, dy\, dz \quad I_z = \iiint_W (x^2 + y^2)\delta \, dx\, dy\, dz$$

Ejemplo

Calcula el momento de inercia respecto del eje z del sólido ubicado por encima del plano xy y acotado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y por el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, $a > 0$, con densidad puntual constante δ.

Campos gravitatorios de cuerpos sólidos

El **potencial gravitatorio** que actúa sobre una masa puntual m situada en (x_0, y_0, z_0) debido a la presencia de un sólido W con densidad puntual $\delta(x, y, z)$ es:

$$V(x_0, y_0, z_0) = -Gm \iiint_W \frac{\delta(x, y, z)\, dx\, dy\, dz}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}}$$

donde $G = 6,67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2$ es la **constante de gravitación universal**.

Ejercicios

1. Halla el valor medio de la función en el recinto que se indica:
(a) $f(x, y) = e^{x+y}$ sobre el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, 0)$.
(b) $f(x, y, z) = e^{-z}$ sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

2. Halla la masa y el centro de gravedad de la región $F = \{(x, y) \,:\, 0 \leq x \leq 1\,,\, x^3 \leq y \leq \sqrt{x}\}$, si la densidad de sus puntos viene dada por $\delta(x, y) = 3x$.

3. Una placa de oro labrada viene representada por el rectángulo $D = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ (centímetros) y tiene densidad puntual $\delta(x, y) = y^2 \sin^2 4x + 2$ (gramos por centímetro cuadrado). Si el oro se vende a 7 euros por gramo, ¿cuánto vale la placa?

4. Halla la masa del sólido acotado por el cilindro $x^2 + y^2 = 2x$ y por el cono $z^2 = x^2 + y^2$, si la densidad puntual es $\delta(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

5. Halla el momento de inercia respecto de los ejes coordenados de la bola $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ con densidad constante δ.

Soluciones y/o sugerencias a los ejercicios:

1. **(a)** 2; **(b)** $3/e$.
2. $m = \frac{3}{5}$; $G\left(\frac{25}{42}, \frac{25}{48}\right)$.
3. $\frac{7}{3}\pi^2(\pi^2 + 12) \simeq 503,64$ euros.
4. 3π.
5. $I_x = I_y = I_z = \frac{8\pi\delta R^5}{15}$.